

Exercices corrigés

étude analytique de l'espace

< exercices de bases >

Ex.1: $A(1, 3, -2)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

1° Donner une représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$.

2° a-t-on $B(0, 1, 4) \in (D)$?

3° (Δ) est une droite passant par B est parallèle à (D) .

Donner une représentation paramétrique de (Δ) .

Solution: 1° (D) : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3 \\ z = -2+5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

2° $B \in (D) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x_B = 1-t \\ y_B = 3 \\ z_B = -2+5t \end{cases}$

mais $y_B = 1 \neq 3$ donc $B \notin (D)$.

3° on a $(\Delta) \parallel (D)$ donc (D) et (Δ) ont le même vecteur directeur;

c-à-d $(\Delta) = \Delta(B, \vec{u})$

donc: $(\Delta): \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 4+5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Ex.2: $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 2, 0)$, $C(4, 1, 1)$

Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés. (غير مستقيمة A, B, C)

Solution:

Rappel: $(A, B, C) \text{ alignés} \Leftrightarrow (\vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont colinéaires})$

on a: $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} \begin{pmatrix} 4-(-1) \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1

on calcule les déterminants extraits du tableau $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. on a:

$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 2 \times 5 = 4 - 10 = -6 \neq 0$

Donc \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires.

donc: A, B et C ne sont pas alignés

2^{eme} Solution:

prop: $(A, B, C) \text{ alignés} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq:} \\ \vec{AB} = k \vec{AC} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \begin{cases} 4 = 5k \\ 2 = k \\ -1 = 0 \times k \end{cases}$

mais $-1 \neq 0$; donc:

A, B et C ne sont pas alignés

Ex.3: $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

1° Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

2° En déduire que \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires.

Solution:

1° $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ * & 2 & 10 \\ * & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & -1 & * \\ 1 & * & 10 \\ 0 & * & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & * & 6 \\ 1 & 2 & * \\ 0 & 2 & * \end{vmatrix}$

$= + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

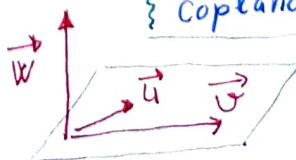
$= (6 - 20) + (3 - 0) + 6(2 - 0)$

$= -14 + 3 + 12 = 1$

2° on a $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 1 \neq 0$

donc: \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires (غير مستوائيات)

لا توجد في نفس المستوى:



Ex. 4: $A(5, 7, 6)$, $B(-2, -3, 1)$

$C(3, 0, 1)$, $D(0, 1, 1)$

Montrer que: A, B, C et D ne sont pas coplanaires (غير مستوياتية)

► Solution:

Rappel $\left(\begin{matrix} A, B, C, D \\ \text{coplanaires} \end{matrix} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} \vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD} \\ \text{coplanaires} \end{matrix} \right)$

$$\Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}) = 0$$

donc: (A, B, C, D) ne sont pas coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}) \neq 0$$

on détermine \vec{AB} , \vec{BC} et \vec{CD} :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2-5 \\ -3-7 \\ 1-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 0-(-3) \\ 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc:

$$\det(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}) = \begin{vmatrix} -7 & 5 & -3 \\ -10 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (5) \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -10 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7(0-0) - 5(0+5) - 3(0+15)$$

$$= 0 - 25 - 45 = -70$$

$$\text{Comme } \det(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}) = -70 \neq 0$$

donc: A, B, C et D ne sont pas coplanaires

A, B, C و D لا تنتمي إلى نفس المستوى

Ex. 5: $A(2, 0, 3)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

1° Donner une représentation paramétrique du plan: $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

2° Donner deux points appartenant à \mathcal{P} .

► Solution: 1° (\mathcal{P}) passe par le point A et dirigés par \vec{u} et \vec{v} .

$$\text{donc: } (\mathcal{P}): \begin{cases} x = 2 + t - 3\lambda \\ y = t + 7\lambda \\ z = 3 + 4t \end{cases} (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$$

2° Pour donner des points appartenant au plan (\mathcal{P}) , il suffit de remplacer t et λ par des valeurs quelconques, par

exemple: $t = 1$ et $\lambda = 0$

$$\begin{cases} x = 2 + 1 \\ y = 1 \\ z = 3 + 4 \times 1 \end{cases} \Rightarrow B(3, 1, 7) \in (\mathcal{P})$$

on prend: $t = 0$; $\lambda = 1$ on trouve:

$$\begin{cases} x = 2 - 3 \times 1 \\ y = 7 \times 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-1, 7, 3) \in (\mathcal{P})$$

Ex. 6: (\mathcal{Q}) un plan passant par $A(1, 1, 3)$

et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (\mathcal{Q}) .

Donner une équation cartésienne de (\mathcal{Q}) .

► Solution: On a:

$$(\mathcal{Q}): ax + by + cz + d = 0$$

avec: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur normal \vec{n} ; donc:

$$(\mathcal{Q}): 2x + 0y + 4z + d = 0$$

$$\text{c-à-d: } (\mathcal{Q}): 2x + 4z + d = 0$$

on a: $A \in (\mathcal{Q})$ donc les coordonnées de A vérifient l'éq de (\mathcal{Q}) ; c-à-d:

$$2x_A + 4z_A + d = 0$$

$$\Rightarrow 2(1) + 4(3) + d = 0 \Rightarrow d = -14$$

$$\text{donc: } (\mathcal{Q}): 2x + 4z - 14 = 0$$

$$\text{ou encore: } (\mathcal{Q}): x + 2z - 7 = 0$$

Ex. 7 : on considère deux droites (Δ) et (D) :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (D) : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et le plan (P) d'équation

cartésienne : $x + 2y + z - 15 = 0$

1°/ Montrer que : $(D) \perp (\Delta)$

2°/ Déterminer $(\Delta) \cap (P)$.

► Solution : 1°/ Rappel : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

on a : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ directeur de (Δ)

et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ directeur de (D)

prop : $(\Delta) \perp (D) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Comme : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3)(-1) + (6)(1) + (-1)(3)$
 $= -3 + 6 - 3 = 0$

donc $\vec{u} \perp \vec{v}$ c-à-d : $(\Delta) \perp (D)$

2°/ Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace

$$M \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\Delta) \\ M \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ vérifie l'éq de } (\Delta) \\ M \text{ vérifie l'éq de } (P) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ x + 2y + z - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (1 + 3\lambda) + 2(1 + 6\lambda) + (-2 - \lambda) - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 14\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{14}{14} = 1$$

on remplace la valeur trouvée dans

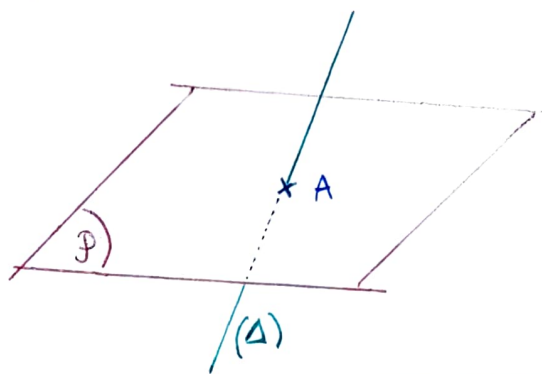
l'éq de (Δ) :

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \times 1 \\ y = 1 + 6 \times 1 \\ z = -2 - 1 \end{cases}$$

(3)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \\ z = -3 \end{cases} \quad \text{donc :}$$

$$(\Delta) \cap (P) = \{ A(4; 7; -3) \}$$



Ex. 8 : On considère un plan (P) défini par son équation cartésienne :

$$(P) : x - y + 3z - 4 = 0$$

Trouver une représentation paramétrique de (P)

► Solution : on a : $(P) : x - y + 3z - 4 = 0$ (*)

on pose : $y = t$ et $z = t'$; $(t, t') \in \mathbb{R}^2$

donc (*) $\Leftrightarrow x - t + 3t' + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -4 + t - 3t'$$

on obtient le

système : $(P) : \begin{cases} x = -4 + t - 3t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$

Req : De cette représentation on déduit que (P) passe par le point

$A(4; 0; 0)$ et dirigés par les vecteurs :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 9 : Soit (P) un plan déterminé par sa représentation paramétrique :

$$(P) : \begin{cases} x = 1 + t - t' \\ y = 2 - t + 2t' \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

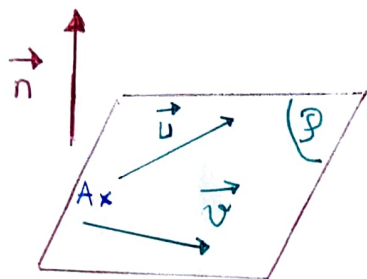
Donner une équation cartésienne du plan (P) .

► Solution: on a: $(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = 1+t-t' \\ y = 2-t+2t' \\ z = -1+2t \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$

donc $A(1; 2; -1) \in (\mathcal{P})$

et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de (\mathcal{P}) .

en utilisant le dessin suivant on remarque que:



$$\vec{n} \perp \vec{u} \text{ et } \vec{n} \perp \vec{v}$$

où $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à (\mathcal{P}) .

on doit déterminer les coordonnées de \vec{n} , car l'éq cartésienne de (\mathcal{P}) s'écrit: $ax+by+cz+d=0$ (*)

on a donc:

$$\vec{n} \perp (\mathcal{P}) \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ \vec{n} \perp \vec{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \times \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \times \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+2c=0 \\ -a+2b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b-2c \\ a = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = b-2c \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a = 2b = 2 \times (-2c) = -4c \end{cases}$$

donc: $\vec{n} \begin{pmatrix} -4c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}; \quad c \in \mathbb{R}$

$\vec{n} \neq \vec{0}$ donc: $c \neq 0$. on prend par exemple $c = -1$; donc: $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

on remplace dans l'éq: (*)

$$(\mathcal{P}): 4x+2y-z+d=0$$

Pour déterminer d on écrit:

$$A(1; 2; -1) \in (\mathcal{P}) \Rightarrow 4x_A + 2y_A - z_A + d = 0$$

$$\Rightarrow 4(1) + 2(2) - (-1) + d = 0$$

$$\Rightarrow 4+4+1+d=0 \Rightarrow d = -9$$

donc: $(\mathcal{P}): 4x+2y-z-9=0$

Ex. 10: (\mathcal{P}) est un plan passant par $A(3; 1; -2)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1° Donner une équation cartésienne de (\mathcal{P}) .

2° Vérifier que: $B(1; -1; -1) \in (\mathcal{P})$

$C(1; -1; 0) \notin (\mathcal{P})$

3° Donner une représentation paramétrique de la droite (D) :

telle que: $\begin{cases} C \in (D) \\ (D) \perp (\mathcal{P}) \end{cases}$

► Solution: Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. on a:

$$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

avec: $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix}$

donc:

$$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 1(x-3) + 1(y-1) + 4(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y+4z-3-1+8=0$$

on trouve: $(\mathcal{P}): x+y+4z+4=0$

2° $B(1; -1; -1) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow x_B + y_B + 4z_B + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + (-1) + 4(-1) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ . cette égalité est vraie}$$

donc on a bien: $B \in (\mathcal{P})$

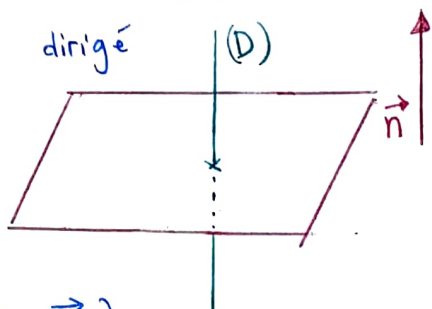
on a: $x_C + y_C + 4z_C + 4 = 1 - 1 + 0 + 4 = 4 \neq 0$

donc: $C(1, -1, 0) \notin (P)$

3°/ on a: $(D) \perp (P)$
et $\vec{n} \perp (P)$

donc (D) est dirigé

par $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$



càd :

$(D) = D(C; \vec{n})$

donc: $(D) : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$

Ex. 11: $A(0, 0, 1), B(-1, 2, 0), C(1, 1, 1)$

1°/ Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

2°/ Donner une équation cartésienne du plan: (ABC) .

► Solution: $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et comme: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (2)(1) = -1 - 2 = -3 \neq 0$

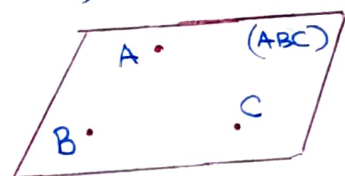
donc A, B et C ne sont pas alignés
(غير مستقيمة C, B, A)

Reg: trois points qui ne sont pas alignés forment toujours un plan,
donc: (ABC) est un plan passant par le point A et dirigés par les deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

(5)

2°/ A, B, C non alignés $\Rightarrow A, B$ et C forment un plan (ABC)

Soit $M(x, y, z)$
un point de
l'espace.



$M \in (ABC) \Leftrightarrow (A, B, C \text{ et } M \text{ sont coplanaires})$

$\Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & -1 & 1 \\ y-0 & 2 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} y & 1 \\ z-1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & 2 \\ z-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x(0+1) + (0-(z-1)) + (-y - 2(z-1)) = 0$

$\Leftrightarrow x - z + 1 - y - 2z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 3z + 3 = 0$

donc: $(ABC) \quad x - y - 3z + 3 = 0$

★ ★ ★ ★